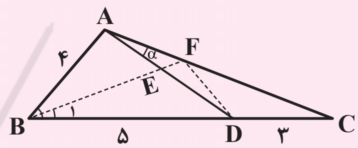
پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. نیم‌ساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم تا AD را در E و AC را در F قطع کند. F را به D وصل می‌کنیم. اکنون با توجه به قضیهٔ نیم‌سازها در مثلث ABC، طول‌های AF و FC را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{AF}{FC}=\frac{AB}{BC}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{AF+FC}^{AC}}{FC}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{۶}{FC}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow FC=۴, AF=۲$$

حال می‌بینیم که:

$$CF.CA=۴\times۶=۲۴, CD.CB=۳\times۸=۲۴$$

$$\Rightarrow CF.CA=CD.CB$$

بنابراین از A، F، D و B دایره‌ای می‌گذرد و AFDB محاطی است. در نتیجه زاویه‌های α و $B_۱$ در این دایرهٔ محاطی رو به یک کمان و با هم برابرند و در نتیجه:

$$\hat{B}=۲\hat{B}_۱=۲\alpha\Rightarrow\beta=۲\alpha$$ (گزینهٔ ج)

۲. طبق فرض داریم:

$$(۴۲۳)_x=(۲۲۱)_y$$

$$\Rightarrow ۳+۲x+۴x^۲=۱+۲y+۲y^۲$$

$$\Rightarrow ۲y^۲-۴x^۲+۲y-۲x-۲=۰$$

$$\Rightarrow y^۲-۲x^۲+y-x-۱=۰$$

$$\Rightarrow y^۲+y-۲=۲x^۲+x-۱$$

$$\Rightarrow (y-۱)(y+۲)=(۲x-۱)(x+۱)$$

و با توجه به اینکه: ۹≥y و ۲≤x با آزمایش مقادیر مختلف، نتیجه می‌شود که: x=۵ و y=۷ و x+y=۱۲. چون مقدار این عدد در مبنای ده مساوی ۱۱۳ است، لذا در مبنای ۱۲ به‌صورت ۹۵ نوشته می‌شود (گزینهٔ ج).

۳.

$$۴x+۵y=۷\Rightarrow ۴x=۷-۵y, x=\frac{۷-۵y}{۴}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۸-۴y-y-۱}{۴}=۲-y-\frac{y+۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y+۱=۴k,\ \ y=۴k-۱$$

$$\Rightarrow x=۲-(۴k-۱)-k\Rightarrow x=۳-۵k, k\in Z$$

$$S=۵|x|-۳|y|=۵|۳-۵k|-۳|۴k-۱|$$

با تعیین علامت مقادیر داخل قدرمطلق‌ها و با توجه به صحیح بودن k، حالت‌های متفاوت زیر بررسی می‌شوند:

$$k\le۰: S=۵(۳-۵k)-۳(۱-۴k)=-۱۳k+۱۲$$

$$k\ge۱: S=۵(۵k-۳)-۳(۴k-۱)=۱۳k-۱۲$$

بنابراین در حالت اول: ۱۲≤S و در حالت دوم: ۱≤S و لذا می‌نیمم S مساوی ۱ است (گزینهٔ ج).

۴. با توجه به نامساوی واسطه‌های مربعی و حسابی $(\frac{a+b}{۲}\le\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}})$

با فرض: $a=\sqrt{۱-x^۲}$ و $b=\sqrt{۱-y^۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}}{۲}\le\sqrt{\frac{۱-x^۲+۱-y^۲}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲-x^۲-y^۲}{۲}}=\sqrt{\frac{۲-(x+y)^۲+۲xy}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۱+۲xy}{۲}}\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}\le\sqrt{۲+۴xy}$$

اما با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی نیز داریم:

$$\frac{x+y}{۲}\ge\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\sqrt{xy}\le\frac{۱}{۲}, xy\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴xy\le۱$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}\le\sqrt{۳}$$ (گزینهٔ الف)

۵. می‌دانیم که: ۱۱۱۱۱۱=۹۱×۱۲۲۱. بنابراین هر عددی که شامل 6m رقم ۱ باشد، بر ۹۱ بخش‌پذیر است و می‌توان به سادگی نشان داد: عددهایی که شامل ۵ رقم ۱ و کمتر از آن باشند، مضرب ۹۱ نیستند. اما همچنین داریم:

$$\underbrace{۱۱۱...۱}_{\text{۱۲ رقم}}=(۱۱۱۱۱۱)+۱۰^۶(۱۱۱۱۱۱)$$

$$=۱۱۱۱۱۱\times۱۰۰۰۰۰۱$$

$$=۱۱۱۱۱۱\times۱۰۱\times۹۹۰۱$$

پس عددهایی که شامل 12m رقم ۱ باشند، هم بر ۹۱ و هم بر ۱۰۱ بخش‌پذیرند. لذا باید از مجموعهٔ ۱۳۹۵ عضوی فوق عددهایی را انتخاب کنیم که تعداد رقم‌های آن‌ها مضرب ۶ باشد و مضرب ۱۲ نباشد که برابر است با:

$$\left[\frac{۱۳۹۵}{۶}\right]-\left[\frac{۱۳۹۵}{۱۲}\right]=۲۳۲-۱۱۶=۱۱۶$$

و تعداد سه‌تایی‌هایی که از این ۱۱۶ عدد می‌توان انتخاب کرد برابر است با:

$$\binom{۱۱۶}{۳}=\frac{۱۱۶\times۱۱۵\times۱۱۴}{۶}=۲۵۳۴۶۰$$ (گزینهٔ هـ)